数理解析研究所講究録
1484 巻 2006 年 59-68

Strong Convergence of Halpern's Sequence for Accretive Operators in a Banach Space

千葉大学・法経学部 青山 耕治 (Koji AOYAMA)
Faculty of Law and Economics,
Chiba University
東京工業大学大学院・情報理工学研究科 飯塚秀明 (Hideaki IIDUKA)
髙橋渉 (Wataru TAKAHASHI)
Department of Mathematical and Computing Sciences,
Tokyo Institute of Technology

1 序論

H を Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合とし, T は C から C への非拡大写像とする. このとき, $x_1 = x \in C$, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) T x_n$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ を Halpern 型点列と呼ぶ. ここで, $\{\alpha_n\}$ は $[0,1]$ の数列である. Halpern [9] によって導入されたこの点列は, 非拡大写像 T の不動点近似法の一つとして知られている. 1992 年, Wittmann [30] は, Hilbert 空間において Halpern 型点列 $\{x_n\}$ が強収束することを証明した. その後, Shioji–Takahashi [25] は, ある Banach 空間において Halpern 型点列 $\{x_n\}$ が強収束することを証明し, Wittmann [30] よりも一般的な結果を得た. これらに関連する結果としては, 例えば, Takahashi–Kim [27], Atsushiba–Takahashi [2] 等がある.

H を Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸集合とし, A を C から H への単調作用素とする. このとき, すべての $v \in C$ に対して

$$\langle v - u, Au \rangle \geq 0$$

が成り立つとき, $u \in C$ を変分不等式の解といい, その解の集合を $\mathrm{VI}(C, A)$ で表す. 変分不等式の解 u を見つける問題は変分不等式問題と呼ばれる. この問題に関する研究は, Stampacchia [17, 18] によって 1964 年に始まり, その後, 幅広く研究が行われてきた. P_C を H から C への距離射影とし, r は正の実数とする. このとき, $x_1 = x \in C$, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = P_C(x_n - rAx_n)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ によって変分不等式の解を見つける手法は, 射影法と呼ばれる.

Iiduka–Takahashi [10] は, 逆強単調作用素に関する変分不等式の解を求めるために, Halpern 型点列に射影法を取り込んだ新たな点列を考察し, 次のような定理を得た.

定理 1.1 ([10]). C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合とし, $\alpha > 0$ とする. A を C から H への α-逆強単調作用素, つまり, 任意の $x, y \in C$ に対して

$$\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geq \alpha \|Ax - Ay\|^2$$

が成り立つとし, $\mathrm{VI}(C, A) \neq \emptyset$ を仮定する. $\{\alpha_n\}$ は $[0, 1]$ の数列で,

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty \text{ かつ } \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty \tag{1.1}$$

を満たすとする. $\{\lambda_n\}$ はある $a > 0$ に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| < \infty \tag{1.2}$$

を満たす $[a, 2\alpha]$ の数列とする. さらに, $x_1 = x \in C$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) P_C(x_n - \lambda_n A x_n)$$

で点列 $\{x_n\}$ を定義する. このとき, $\{x_n\}$ は $\mathrm{VI}(C, A)$ のある点 z に強収束する.

この論文では, Hilbert 空間における変分不等式問題を拡張した次のような問題 [1] を取り扱い, 定理 1.1 の拡張を議論する.

問題 1.2. E を smooth な Banach 空間とし, E^* を E の相対空間とする. $\langle x, f \rangle$ で $x \in E$ における $f \in E^*$ の値を表す. C を空でない E の閉凸部分集合とし, A を C から E への増大作用素とする. このとき, すべての $v \in C$ に対して

$$\langle Au, J(v - u) \rangle \geq 0$$

を満たす $u \in C$ を求めよ. ただし, J は E 上の相対写像である.

問題 1.2 の解 $u \in C$ の集合を $\mathrm{S}(C, A)$ で表す. つまり,

$$\mathrm{S}(C, A) = \{u \in C : \text{すべての } v \in C \text{ に対して } \langle Au, J(v - u) \rangle \geq 0\}.$$

この問題は, 非拡大写像の不動点問題, 増大作用素のゼロ点を求める問題等と関連がある [1]. 問題 1.2 の解を求めるために, 次のような点列 $\{x_n\}$ を考える. $x_1 = x \in C$, $n \in \mathbb{N}$ に

対して

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n) Q_C(x_n - \lambda_n A x_n). \tag{1.3}$$

ここで, Q_C は E から C の上へのサニー非拡大射影であり, $\{\alpha_n\}$ は $[0,1]$ の数列, $\{\lambda_n\}$ は正の実数列である. そして, ある Banach 空間において, [10] で得られた強収束定理 (定理 1.1) の拡張 (定理 3.1) が得られることを述べる. さらに, その応用についても言及する.

2 準備

E をそのノルムが $\|\cdot\|$ で表される Banach 空間とし, E^* を E の相対空間とする. $x \in E$ における $f \in E^*$ の値を $\langle x, f\rangle$ で表す. 正の整数全体の集合を $\mathbb{N}$ で表す.

$q > 1$ とする. 各 $x \in E$ に対して, 次式で定義される E から 2^{E^*} への写像 J_q を (一般化された) 相対写像という.

$$J_q(x) = \{x^* \in E^* : \langle x, x^*\rangle = \|x\|^q, \|x^*\| = \|x\|^{q-1}\}, \forall x \in E.$$

特に, J_2 を単に J と表し, (正規化された) 相対写像という. $x \neq 0$ のとき, $J_q(x) = \|x\|^{q-2}J(x)$ であり, E が Hilbert 空間の場合, J は E 上の恒等写像 I である. この相対写像 J は E のノルムの微分可能性と多いに関わりを持つ. $U = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ とするとき, すべての $x, y \in U$ に対して

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{2.1}$$

が常に存在するとき, E のノルムは Gâteaux 微分可能であるといわれる. このとき, Banach 空間 E は smooth であるともいわれる. E が smooth であるならば, 相対写像 J は一価となる. 任意の $y \in U$ に対して極限 (2.1) が $x \in U$ に対して一様に存在するとき, E のノルムは uniformly Gâteaux 微分可能でるといわれる. $x, y \in U$ に対して一様に極限 (2.1) が存在するとき, E は uniformly smooth であるという [26].

次式で定義される関数 ρ: $[0,\infty) \to [0,\infty)$ は, Banach 空間 E の modulus of smoothness と呼ばれる.

$$\rho(\tau) = \sup\left\{\frac{1}{2}(\|x+y\| + \|x-y\|) - 1 : x, y \in E, \|x\| = 1, \|y\| = \tau\right\}, \forall \tau \in [0,\infty).$$

E が uniformly smooth であるための必要十分条件は, $\lim_{\tau\to\infty} \rho(\tau)/\tau = 0$ であることが知られている. q を $1 < q \le 2$ となる実数とする. Banach 空間 E が q-uniformly smooth(q-US) であるとは, ある定数 $c > 0$ が存在し, すべての $\tau > 0$ に対して, $\rho(\tau) \le$

$c\tau^q$ が成り立つときをいう. この性質については, 例えば, [3] または [29] を参照するとよい. q-US な Banach 空間については, 次の定理が知られている [3, 4]:

定理 2.1 ([3, 4]). E を Banach 空間, q を $1 < q \leq 2$ となる実数とする. このとき, E が q-US であるための必要十分条件は, ある定数 $K \geq 1$ が存在し, すべての $x, y \in E$ に対して

$$\frac{1}{2}(\|x+y\|^q + \|x-y\|^q) \leq \|x\|^q + \|Ky\|^q \tag{2.2}$$

が成り立つことである.

不等式 (2.2) を成り立たせるもっとも良い定数 K は, E の q-uniformly smoothness constant と呼ばれる [3]. 定理 2.1 を使うと次の補助定理を示すことができる.

補助定理 2.2 ([31]). E を Banach 空間, q を $1 < q \leq 2$ となる実数とし, E は q-US であるとする. このとき, すべての $x, y \in E$ に対して

$$\|x+y\|^q \leq \|x\|^q + q\langle y, J_q(x)\rangle + 2\|Ky\|^q$$

が成り立つ. ここで, J_q は E の一般化された相対写像であり, K は E の q-uniformly smoothness constant である.

Banach 空間 E が一様凸であるとは, 各 $\epsilon \in (0, 2]$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在し, 任意の $x, y \in U = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ に対して

$$\|x-y\| \geq \varepsilon \text{ ならば } \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1-\delta$$

が成り立つときをいう. また, $x, y \in U$(ただし, $x \neq y$) に対して, 常に $\|x+y\| < 2$ であるとき, E は狭義凸であるといわれる. E が $E = (E^*)^*$ を満たすならば, E は回帰的であるといわれる. 一様凸な Banach 空間は, 狭義凸かつ回帰的であることが知られている.

E を Banach 空間とし, C を E の空でない閉凸部分集合とする. このとき, C から C への写像 T が非拡大であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x-y\|$$

が成り立つときをいう. T の不動点集合を $\mathrm{F}(T)$ で表す. 狭義凸な Banach 空間では, $\mathrm{F}(T)$ は閉凸集合である [26]. Banach 空間 E の空でない閉凸集合 C が正規構造を持つとは, 2 点以上からなる C の有界閉凸集合 D に対して, 点 $z \in D$ が存在し

$$\sup\{\|z-y\| : y \in D\} < \sup\{\|x-y\| : x, y \in D\} = \delta(D)$$

となることである．一様凸な Banach 空間の閉凸集合および Banach 空間のコンパクト凸集合は正規構造を持つことが知られている [26]．次の定理は Kirk[15] によって証明された．

定理 2.3 (Kirk [15]). E を回帰的な Banach 空間とし，E の有界閉凸集合 C は正規構造を持つとする．T を C から C への非拡大写像とする．このとき，$\mathrm{F}(T) \neq \emptyset$ である．

C を Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし，D を C の部分集合とする．このとき，C から D の上への写像 Q がサニーであるとは，任意の $x \in C$ と $t \geq 0$ に対して

$$Q(Qx + t(x - Qx)) = Qx$$

が成り立つことである．また，C から D の上への写像 Q が射影であるとは，任意の $x \in C$ に対して，$Qx = x$ が成り立つことである．D が C のサニー非拡大レトラクトであるとは，C から D の上へのサニー非拡大射影が存在するときをいう．サニー非拡大射影の存在については，次の定理 [16] が知られている．

補助定理 2.4 ([16]). E を一様凸かつ uniformly smooth な Banach 空間とし，C を E の空でない閉凸部分集合とする．T を C から C への非拡大写像とし，$\mathrm{F}(T) \neq \emptyset$ とする．このとき，$F(T)$ は C のサニー非拡大レトラクトである．

次の補助定理 [22] は，サニー非拡大射影の一つの特徴づけを述べている．

補助定理 2.5 ([22], [7]). C を smooth な Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とする．Q_C を E から C の上への射影とする．このとき，Q_C がサニー非拡大であることと，任意の $x \in E$ と $y \in C$ に対して

$$\langle x - Q_C x, J(y - Q_C x)\rangle \leq 0$$

が成り立つことは同値である．

E が Hilbert 空間のとき，E から C の上へのサニー非拡大射影 Q_C は，E から C の上への距離射影と一致することが知られている．

E を Banach 空間，C を E の空でない閉凸部分集合とする．C から E への作用素 A が増大作用素であるとは，任意の $x, y \in C$ に対して，ある $j(x-y) \in J(x-y)$ が存在して

$$\langle Ax - Ay, j(x-y)\rangle \geq 0$$

が成り立つときをいう．問題 1.2 の解はサニー非拡大射影を使って次のように特徴づけられる [1]．

補助定理 2.6 ([1]). C を smooth な Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とする. Q_C を E から C の上へのサニー非拡大射影とし, A を C から E への増大作用素とする. このとき, 任意の $\lambda > 0$ に対して

$$\mathrm{S}(C, A) = \mathrm{F}(Q_C(I - \lambda A))$$

が成り立つ. ここで, $\mathrm{S}(C, A)$ は, 問題 1.2 の解の集合である.

本論文では, smooth な Banach 空間において, Hilbert 空間における逆強単調作用素の一つの一般化である次のような作用素を取り扱う. C を smooth な Banach 空間 E の部分集合とし, $\alpha > 0$ とする. C から E への作用素 A が α-逆強増大作用素 [1] であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して

$$\langle Ax - Ay, J(x - y)\rangle \geq \alpha \|Ax - Ay\|^2 \tag{2.3}$$

が成り立つときをいう. E が Hilbert 空間のとき, 逆強増大作用素は, 逆強単調作用素 [6, 13, 19] である. 不等式 (2.3) から, すべての $x, y \in C$ に対して

$$\|Ax - Ay\| \leq \frac{1}{\alpha}\|x - y\|$$

が成り立つことがわかる. 2-US な Banach 空間において, 逆強増大作用素は次のような性質を持つ.

補助定理 2.7 ([1]). C を 2-US な Banach 空間 E の空でない閉凸集合とする. $\alpha > 0$ とし, A を C から E への α-逆強増大作用素とする. λ を $0 < \lambda \leq \alpha/K^2$ を満たす実数とする. このとき, $I - \lambda A$ は C から E への非拡大写像である. ここで, K は E の 2-uniformly smoothness constant である.

証明. 補助定理 2.2 と A の定義 (2.3) より, 任意の $x, y \in C$ に対して, 次の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
\|(I - \lambda A)x - (I - \lambda A)y\|^2 &= \|(x - y) - \lambda(Ax - Ay)\|^2 \\
&\leq \|x - y\|^2 - 2\lambda\langle Ax - Ay, J(x - y)\rangle \\
&\qquad + 2K^2\lambda^2\|Ax - Ay\|^2 \\
&\leq \|x - y\|^2 - 2\lambda\alpha\|Ax - Ay\|^2 + 2K^2\lambda^2\|Ax - Ay\|^2 \\
&\leq \|x - y\|^2 + 2\lambda(K^2\lambda - \alpha)\|Ax - Ay\|^2.
\end{aligned}$$

したがって, $0 < \lambda \leq \alpha/K^2$ であることから, $I - \lambda A$ が非拡大写像であることがわかる. □

定理 2.3, 補助定理 2.6 および補助定理 2.7 の結果から, D が一様凸かつ 2-US な Banach 空間 E の空でない有界閉凸集合で, E のサニー非拡大レトラクトであり, さらに, A が D から E への逆強増大作用素であるならば, $\mathrm{S}(D,A) \neq \emptyset$ であることがわかる.

3 強収束定理とその応用

本節では, 2-US かつ一様凸な Banach 空間における逆強増大作用素に対する強収束定理を一つ紹介し, その後, その応用をいくつか述べる. この定理の証明の本質的な部分は, Shioji–Takahashi [25] を参考にすることによって証明できる.

定理 3.1. E を 2-US かつ一様凸な Banach 空間とし, C を E の空でない閉凸部分集合とする. Q_C を E から C へのサニー非拡大射影とする. $\alpha > 0$ とし, A を C から E への α-逆強増大作用素とし, $\mathrm{S}(C,A) \neq \emptyset$ を仮定する. $\{\alpha_n\}$ を (1.1) を満たす $[0,1]$ の数列とし, $\{\lambda_n\}$ をある $a > 0$ に対して (1.2) を満たす $[a, \alpha/K^2]$ の数列とする. ここで, K は E の 2-uniformly smoothness constant である. このとき, $x_1 = x \in C$, かつ, $n \in \mathbb{N}$ に対して (1.3) によって定義された点列 $\{x_n\}$ は, $\mathrm{S}(C,A)$ のある点 z に強収束する.

次に, 定理 3.1 の応用を議論する. まず, 逆強増大作用素のゼロ点を求める問題に関する一つの定理を述べる.

定理 3.2. E を 2-US かつ一様凸な Banach 空間とし, $\alpha > 0$ とする. A を E から E への α-逆強増大作用素とし, $A^{-1}0 = \{u \in E : Au = 0\} \neq \emptyset$ を仮定する. $\{\alpha_n\}$ を (1.1) を満たす $[0,1]$ の数列とし, $\{\lambda_n\}$ をある $a > 0$ に対して (1.2) を満たす $[a, \alpha/K^2]$ の数列とする. ここで, K は E の 2-uniformly smoothness constant である. $x_1 = x \in E$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n)(x_n - \lambda_n A x_n)$$

として点列 $\{x_n\}$ を定義する. このとき, 点列 $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ のある点 z に強収束する.

証明. E 上の恒等写像 I は E から E の上へのサニー非拡大射影である. つまり, $Q_E = I$. よって,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \alpha_n x + (1-\alpha_n)(x_n - \lambda_n A x_n) \\ &= \alpha_n x + (1-\alpha_n) Q_E(x_n - \lambda_n A x_n). \end{aligned}$$

を得る. また, $\mathrm{S}(E,A) = A^{-1}0$ である. ここで定理 3.1 を使うと, $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ のある点 z に強収束することが示せる. □

定理 3.1 の二つ目の応用として, 狭義擬縮小写像 (strictly pseudocontractive mapping) の不動点を求める問題を考える. k を $0 \leq k < 1$ を満たす実数とし, C を Banach 空間 E の空でない部分集合とする. このとき, C から C への写像 T が k-狭義擬縮小写像 [6, 21] であるとは, 任意の $x, y \in C$ に対して, ある $j(x-y) \in J(x-y)$ が存在して,

$$\langle Tx - Ty, j(x-y)\rangle \leq \|x-y\|^2 - \frac{1-k}{2}\|(I-T)x-(I-T)y\|^2 \tag{3.1}$$

が成り立つときをいう. 不等式 (3.1) は,

$$\langle (I-T)x-(I-T)y, j(x-y)\rangle \geq \frac{1-k}{2}\|(I-T)x-(I-T)y\|^2$$

と変形できるので, $T\colon C \to C$ が k-狭義擬縮小写像であるならば, $I-T$ は C から E への $(1-k)/2$-逆強増大作用素であることがわかる.

定理 3.3. E を 2-US かつ一様凸な Banach 空間とし, C を E の空でない閉凸集合で E のサニー非拡大レトラクトとする. k を $0 \leq k < 1$ を満たす実数とし, T を C から C への k-狭義擬縮小写像とし, $\mathrm{F}(T) = \{x \in C : Tx = x\} \neq \emptyset$ を仮定する. $\{\alpha_n\}$ を (1.1) を満たす $[0,1]$ の数列とし, $\{\lambda_n\}$ をある $a > 0$ に対して (1.2) を満たす $[a, \alpha/K^2]$ の数列とする. ここで, K は E の 2-uniformly smoothness constant である. $x_1 = x \in C$, かつ, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n)((1-\lambda_n)x_n + \lambda_n T x_n)$$

によって点列 $\{x_n\}$ を定義する. このとき, 点列 $\{x_n\}$ は $\mathrm{F}(T)$ のある点 z に強収束する.

証明. 仮定より, $I-T$ は C から E への $(1-k)/2$-逆強増大作用素である. また, $\mathrm{F}(T) = \mathrm{S}(C, I-T)$ であることは容易に確かめられる. ここで, Q_C を E から C の上へのサニー非拡大射影とすると, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(1-\lambda_n)x_n + \lambda_n T x_n = Q_C(x_n - \lambda_n(I-T)x_n)$$

が成り立つ. したがって, 定理 3.1 より, $\{x_n\}$ は $\mathrm{F}(T) = \mathrm{S}(C, I-T)$ のある点 z に強収束する. □

参考文献

[1] K. Aoyama, H. Iiduka and W. Takahashi, *Weak convergence of an iterative sequence for accretive operators in a Banach space*, Fixed Point Theory Appl., to appear.

[2] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for a finite family of nonexpansive mappings and applications*, Indian J. Math. **41** (1999), 435–453.

[3] K. Ball, E. A. Carlen and E. H. Lieb, *Sharp uniform convexity and smoothness inequalities for trace norms*, Invent. Math. **115** (1994), 463-482.

[4] B. Beauzamy, *Introduction to Banach Spaces and Their Geometry*, 2nd Ed., North Holland, 1985.

[5] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle*, Masson, Editeur, Paris, 1983.

[6] F. E. Browder and W. V. Petryshyn, *Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **20** (1967), 197-228.

[7] R. E. Bruck, Jr., *Nonexpansive retracts of Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), 384-386.

[8] R. E. Bruck, *A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces*, Israel J. Math. **32** (1979), 107-116.

[9] B. Halpern, *Fixed points of nonexpansive maps*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 957-961.

[10] H. Iiduka and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and inverse-strongly-monotone mappings*, Nonlinear Anal. **61** (2005), 341-350.

[11] H. Iiduka and W. Takahashi, *Weak convergence of a projection algorithm for variational inequalities in a Banach space*, submitted.

[12] H. Iiduka and W. Takahashi, *Strong convergence of a projection algorithm by hybrid type for monotone variational inequalities in a Banach space*, submitted.

[13] H. Iiduka, W. Takahashi and M. Toyoda, *Approximation of solutions of variational inequalities for monotone mappings*, PanAmer. Math. J. **14** (2004), 49-61.

[14] S. Ishikawa, *Fixed points by a new iteration method*, Proc. Amer. Math. Soc. **44** (1974), 147-150.

[15] W. A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, Amer. Math. Monthly **72** (1965), 1004-1006.

[16] S. Kitahara and W. Takahashi, *Image recovery by convex combinations for sunny nonexpansive retractions*, Topol. Method Nonlinear Anal. **2** (1993), 333-342.

[17] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia, *An introduction to variational inequalities and their applications*, Academic Press, New York, 1980.

[18] J. L. Lions and G. Stampacchia, *Variational inequalities*, Comm. Pure Appl.

Math. **20** (1967), 493-517.

[19] F. Liu and M. Z. Nashed, *Regularization of nonlinear ill-posed variational inequalities and convergence rates*, Set-Valued Anal. **6** (1998), 313-344.

[20] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 506-510.

[21] M. O. Osilike and A. Udomene, *Demiclosedness principle and convergence theorems for strictly pseudocontractive mappings of Browder-Petryshyn type*, J. Math. Anal. Appl. **256** (2001), 431-445.

[22] S. Reich, *Asymptotic behavior of constructions in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **44** (1973), 57-70.

[23] S. Reich, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **67** (1979), 274-276.

[24] S. Reich, *Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **75** (1980), 287-292.

[25] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence of approximated sequences for nonexpansive mappings in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 3641-3645.

[26] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[27] W. Takahashi and G. E. Kim, *Approximating fixed points of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Math. Japonica **48** (1998), 1-9.

[28] W. Takahashi and Y. Ueda, *On Reich's strong convergence theorems for resolvents of accretive operators*, J. Math. Anal. Appl. **104** (1984), 546-553.

[29] Y. Takahashi, K. Hashimoto and M. Kato, *On sharp uniform convexity, smoothness, and strong type, cotype inequalities*, J. Nonlinear and Convex Analysis **3** (2002), 267-281.

[30] R. Wittmann, *Approximation of fixed points of nonexpansive mappings*, Arch. Math. **58** (1992), 486-491.

[31] H. K. Xu, *Inequalities in Banach spaces with applications*, Nonlinear Anal. **16** (1991), 1127-1138.